Série 12 (Corrigé)

Mots-clés : *Méthode des moindres carrés, matrices symétriques*

Remarques :

1. **La série est volontairement plus courte que d'habitude, pour vous laisser le temps de réfléchir à certains exercices de la semaine passée**
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Déterminer la solution au sens des moindres carrés de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$

a) en utilisant l'équation normale lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

b) en utilisant la méthode QR lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) en utilisant l'équation normale.

i) L'équation normale $A^TA\overrightarrow{x} = A^T\overrightarrow{b}$ est $\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$, elle a pour solution $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5/14 \\ 5/7 \end{pmatrix}$.

ii) $A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$, $A^T\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

iii) $A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$.

b) en utilisant la méthode QR.

i) Les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes, donc décomposer A selon $A = QR$ et résoudre $R\overrightarrow{x} = Q^T\overrightarrow{b}$ est équivalent à résoudre l'équation normale. La décomposition est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 0 & -2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{11/2} \end{pmatrix}.$$

L'approximation $\overrightarrow{x}$ au sens des moindres carrés est la solution du système $R\overrightarrow{x} = Q^T\overrightarrow{b}$, où $Q^T\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{22} \end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1/11 \\ -2/11 \end{pmatrix}$.

ii) Ici de même, les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes, donc décomposer A selon $A = QR$ et résoudre $R\overrightarrow{x} = Q^T\overrightarrow{b}$ est équivalent à résoudre l'équation normale. La décomposition a également été calculée à l'exercice 4 (question a)) et est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve $Q^T\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11/9 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On considère les points

x_i	2	5	6	8
y_i	1	2	3	3

On suppose que la relation entre les x_i et les y_i suit une loi $y = ax + b$. Calculer a et b au sens des moindres carrés.

Sol.: Le système linéaire correspondant est $\overrightarrow{y} = A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où A est donnée par $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. L'équation normale correspondante est $A^TA\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T\overrightarrow{y}$. On obtient la solution $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} \\ \frac{9}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.36 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite de régression correspondant aux points $(3, 2)$, $(-1, 2)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$.

Sol.: On va résoudre $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ où A, $\vec{b}$ et $\vec{x}$ sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et}\,\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On obtient

$$A^T A = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \text{ et } A^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Après résolution, on obtient $a = \frac{-1}{5}$ et $b = \frac{11}{5}$. Ainsi

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{11}{5}.$$

Exercice 4

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta,$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs à l'origine.

Indication utiliser la loi des cosinus : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ où a, b, c sont les longueurs des cotés d'un triangle et γ est l'angle opposé au côté de longueur c.

Sol.: On applique la loi des cosinus

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

On développe la norme de gauche

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

On obtient alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| \cos\theta$$

Exercice 5

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

a) Montrer que $A\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot A\vec{u}$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

b) Donner un contre-exemple à a) pour une matrice carrée quelconque, en trouvant une matrice B de taille 2×2 telle que $B\vec{v} \cdot \vec{u} \neq \vec{v} \cdot B\vec{u}$ en général.

Sol.:

a) En effet, $A\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = (A\overrightarrow{v})^T\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}^T A^T \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}^T A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \cdot A\overrightarrow{u}$.

b) Par exemple, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $B\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v} \cdot B\overrightarrow{u}$ pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $A = QDQ^T$, avec Q une matrice orthogonale.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) A est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormale d'après le théorème spectral. On trouve

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

b) De même, A est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormale d'après le théorème spectral. On trouve

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ coïncide avec l'ensemble non vide des solutions de l'équation normale $A^T A\overrightarrow{x} = A^T\overrightarrow{b}$. ☐ ☐

b) Soit A une matrice $m \times n$ et $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$. Le problème général des moindres carrés consiste à trouver un $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ qui rend $A\overrightarrow{x}$ aussi proche que possible de $\overrightarrow{b}$. ☐ ☐

Sol.: Vrai : a), b), d). Faux : c).

a) Vrai. Posons $\hat{b} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Im}(A)}(b)$ la projection orthogonale de b sur l'espace des colonnes de A (c'est-à-dire l'image de A). Comme le système $Ax = \hat{b}$ est compatible, il admet au moins une solution $\hat{x}$, et un vecteur $\hat{x}$ vérifie $A\hat{x} = \hat{b}$ si et seulement si $\hat{x}$ est solution au sens des moindres carrés de $Ax = b$. Soit donc $\hat{x}$ tel que $A\hat{x} = \hat{b}$ et montrons que $A^T A\hat{x} = A^T b$. Comme $\hat{b}$ est le projeté orthogonal de b sur $\mathbb{I}\gtrdot(A)$ on a que $b - \hat{b}$ est orthogonal à toute colonne a_i de A. Ainsi $a_i \cdot (b - \hat{b}) = 0$ et comme $(a_i)^T$ sont les lignes de A^T on obtient que $A^T(b - \hat{b}) = 0$ ou encore $A^T b - A^T A\hat{x} = 0$ ce qui donne $A^T A\hat{x} = A^T b$.

Réciproquement, si $\hat{x}$ vérifie $A^T A\hat{x} = A^T b$ alors $A^T(b - A\hat{x}) = 0$ et donc $b - A\hat{x}$ est orthogonal aux lignes de A^T c'est-à-dire aux colonnes de A. Donc $b - A\hat{x}$ est ortgogonal à $\mathrm{Im}(A)$ et $b = A\hat{x} + (b - A\hat{x})$ donne une décomposition de b en somme d'un vecteur de $\mathrm{Im}(A)$ et un vecteur orthogonal à $\mathrm{Im}(A)$. Par unicité d'une telle décomposition on a que $A\hat{x}$ est le projeté orthogonal de b sur $\mathrm{Im}(A)$ c'est-à-dire $A\hat{x} = \hat{b}$ et $\hat{x}$ est solution aux sens des moindres carrés.

b) Vrai. Par définition d'une solution au sens des moindres carrés, il s'agit de trouver (au moins) un $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\left\|A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}\right\|$ soit le plus petit possible.

Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Soit A une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$. Alors, $Q^T A = R$.

b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\hat{\overrightarrow{y}}$ la projection orthogonale de $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W. Alors $\hat{\overrightarrow{y}}$ dépend du choix de la base de W.

c) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, tel que $W = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2\}$. Si $\overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\overrightarrow{z} \perp \overrightarrow{w}_1$ et $\overrightarrow{z} \perp \overrightarrow{w}_2$, alors $\overrightarrow{z} \in W^\perp$.

d) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\overrightarrow{y} \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y}$.

Sol.: Vrai : a), c), d). Faux : b).

a) Vrai. Si $A = QR$ avec Q orthogonale alors $QQ^T = Q^T Q = I_n$ et donc $Q^T A = Q^T QR = I_n R = R$.

b) Faux. Par définition $\hat{\overrightarrow{y}} = \overrightarrow{p}_W \overrightarrow{y}$ est le vecteur de W qui est le plus proche de y (selon la distance euclidienne), il ne dépend donc pas de la base de W choisie.

c) Vrai. Soit $W = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2\}$ et soit $\overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{z} \perp \overrightarrow{w}_1$ et $\overrightarrow{z} \perp \overrightarrow{w}_2$. Montrons que $\overrightarrow{z} \in W^\perp$. Soit $\overrightarrow{w} \in W$, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda_1 \overrightarrow{w_1} + \lambda_2 \overrightarrow{w_2}$ donc $< \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w} >=< \overrightarrow{z}, \lambda_1 \overrightarrow{w_1} + \lambda_2 \overrightarrow{w_2} >= \lambda_1 < \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w_1} > + \lambda_2 < \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w_2} >= 0$.

d) Vrai. Par définition $\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{y})$ est le vecteur de W le plus proche de $\overrightarrow{y}$ (pour la distance euclidienne). Si $\overrightarrow{y} \in W$ on a donc $\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y}$.

Exercice 9

Les données suivantes décrivent le potentiel dans un câble électrique en fonction de la température du câble.

i	$T_i \ [^\circ C]$	$U_i \ [V]$
1	0	-2
2	5	-1
3	10	0
4	15	1
5	20	2
6	25	4

On suppose que le potentiel suit la loi $U = a+bT+cT^2$. Calculer a, b, c au sens des moindres carrés.

Sol.: Le système linéaire s'écrit

$$\overrightarrow{U} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

avec $\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_6 \end{pmatrix}$ et A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & T_1 & T_1^2 \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & T_6 & T_6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 25 & 625 \end{pmatrix}.$$

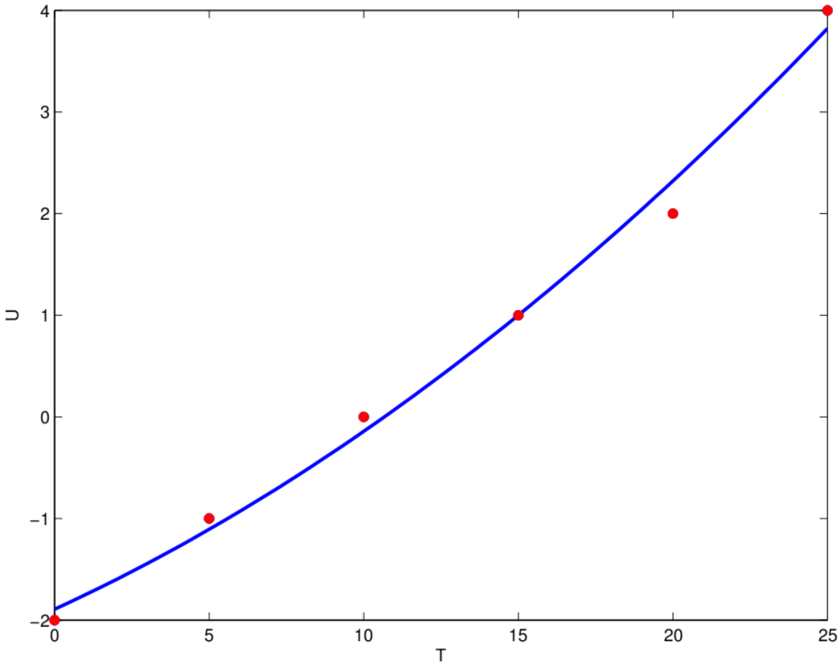
Pour résoudre ce système et trouver a, b, c au sens des moindres carrés, on considère l'équation normale

$$A^T\overrightarrow{U} = A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-53}{28} \\ \frac{39}{280} \\ \frac{1}{280} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.89 \\ 0.139 \\ 0.00357 \end{pmatrix}.$$

Le graphique suivant montre les données (en rouge) et la courbe d'interpolation (bleue) obtenue au sens des moindres carrés.


4
3
2
1
0
−1
−2
U
0
5
10
15
20
25
T